CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1981

CONCOURS SCIENCES

MATHEMATIQUES I

Durée : 4 heures

Samedi 9 mai 1981 de 8 heures à 12 heures

Notations et précisions

– $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geqslant 0\}$, $\mathbb{R}^{+*} = \mathbb{R}^+ - \{0\}$

– Si $(x,y) \to \varphi(x,y)$ est une fonction de deux variables (x,y) définie sur un sous-ensemble $D(\varphi) = I_1 \times I_2$ où I_1 et I_2 sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, on notera :

pour $x \in I_1$, φ_x l'application de I_2 vers $\mathbb{R}$ définie par $\varphi_x(y) = \varphi(x,y)$

pour $x \in I_2$, φ_y l'application de I_1 vers $\mathbb{R}$ définie par $\varphi_y(x) = \varphi(x,y)$

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)$ la dérivée partielle de φ par rapport à x au point (x,y)

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)$ la dérivée partielle de φ par rapport à y au point (x,y)

– Dans tout le problème f et g sont deux fonctions des variables x et y définies sur le domaine $D = \mathbb{R} \times]-2\pi, 2\pi[$ par

$$f(x,y) = \frac{x(e^x \cos y - 1) + y e^x \sin y}{1 + e^{2x} - 2e^x \cos y} \qquad \text{pour} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

$$g(x,y) = \frac{y(e^x \cos y - 1) - x e^x \sin y}{1 + e^{2x} - 2e^x \cos y}$$

$$f(x,y) = 1 \qquad \text{et} \qquad g(x,y) = 0 \qquad \text{pour} \qquad (x,y) = (0,0)$$

Les résultats de I servent dans II 6); la question I 5) un peu difficile sert uniquement à démontrer II 2)b). On pourra utiliser le résultat ; les résultats de II 5) 6) servent dans III 4).

PARTIE I

1) Si l'on pose $z = x + iy$ vérifier que pour $z \neq 0$:

$$f(x,y) + i\,g(x,y) = \frac{z}{e^z - 1} = \frac{ze^{-z}}{1 - e^{-z}} \qquad (1)$$

2) Montrer que les fonctions f_y et g_x sont continues sur leur intervalle de définition.

On pose alors pour :

$$x_0 \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi, \quad I(x_0,y_0) = \int_0^{x_0} f(t,y_0)\,dt$$

$$-2\pi < y_0 < 2\pi \quad K(x_0) = \int_0^{\pi} -g(x_0,t)\,dt$$

$$L(x_0) = I(x_0,0) + K(x_0) - I(x_0,\pi) - K(0)$$

3) *a*) Montrer que $\int_0^{\infty} x\,e^{-x}\,dx$ converge ; en déduire que :

$$I(x_0,0) \qquad \text{et} \qquad I(x_0,\pi)$$

ont des limites finies I et J lorsque x_0 tend vers $+\infty$.

b) Si :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1}\,dx \qquad J = \int_0^{\infty} \frac{-x\,dx}{e^x + 1}$$

démontrer que $I + J = \frac{1}{2}$.

4) *a*) Démontrer l'inégalité si :

$$x_0 > 0, \quad |\,g(x_0,y)\,| < \frac{x_0 + 2\pi}{e^{x_0} - 1}$$

utiliser la relation (1)

En déduire $\lim_{x_0 \to +\infty} K(x_0) = 0$.

b) Démontrer que $\lim_{x_0 \to +\infty} L(x_0) = \frac{3I}{2} - \frac{\pi^2}{4}$

5) On pose :

$$u_n(x) = \frac{1 - e^{-nx}}{n^2}; \qquad x > 0.$$

a) Vérifier l'inégalité :

$$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{p^2} < \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n}$$

b) La série $\Sigma u_n(x)$ est convergente, pourquoi ? Démontrer l'inégalité :

$$u(x) = \sum_1^{\infty} \frac{1 - e^{-nx}}{n^2} < \sum_1^{n} \frac{x}{p} + \frac{1}{n} \qquad \text{(majorer } 1 - e^{-px} \text{ par } px \text{ pour } 1 \leqslant p \leqslant n)$$

En déduire :

$$u(x) < nx + \frac{1}{n} \text{ quel que soit } n \in \mathbb{N}^*.$$

c) En choisissant n convenablement, démontrer pour $x < 1$ l'inégalité $u(x) < 3\sqrt{x}$, en déduire :

$$\lim_{x \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

PARTIE II

Soit D^* le sous-ensemble ouvert $\mathbb{R}^{+*} \times]-2\pi, 2\pi[$. On considère les fonctions f_n, g_n, F_n définies comme suit :

$$f_n(x,y) = e^{-nx}(x \cos ny + y \sin ny)$$

$$g_n(x,y) = e^{-nx}(y \cos ny - x \sin ny)$$

$$F_n(x,y) = -\frac{f_n(x,y)}{n} - \frac{e^{-nx}\cos ny}{n^2} \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

1) *a*) Montrer que pour $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ la série $\Sigma\, n^\beta e^{-\alpha n}$ est convergente, en déduire que les séries :

$$\Sigma\, f_n(x,y)\,,\ \Sigma\, g_n(x,y)\,,\ \Sigma\, F_n(x,y)$$

sont absolument convergentes pour $(x,y) \in D^*$.

b) En remarquant que :

$$f_n(x,y) + i\, g_n(x,y) = z\, e^{-nz} \qquad (z = x + iy)$$

montrer que :

$$f(x,y) = \sum_1^\infty f_n(x,y)\,; \qquad g(x,y) = \sum_1^\infty g_n(x,y)\,.$$

2) On pose :

$$F(x,y) = \sum_1^\infty F_n(x,y)\,.$$

a) Vérifier que :

$$F(x,0) = x\ \mathrm{Log}\,(1 - e^{-x}) - \sum_1^\infty \frac{e^{-nx}}{n^2}\,.$$

b) Montrer que :

$$\lim_{x \to 0} F(x,0) = -\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \qquad \text{(utiliser I 5) } c)$$

c) Montrer que :

$$\lim_{x \to \infty} F(x,0) = 0 \qquad \text{(majorer } e^{-nx} \text{ par } e^{-x})$$

3) *a*) Vérifier :

$$\frac{\partial F_n(x,y)}{\partial x} = f_n(x,y)\,; \qquad \frac{\partial F_n(x,y)}{\partial y} = -\,g_n(x,y)\,,$$

en déduire que F_n est différentiable sur D^*.

b) Calculer :

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,y)\,, \qquad \frac{\partial g_n}{\partial y}(x,y)$$

et vérifier :

$$\left|\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\frac{\partial g_n}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant e^{-nx}\,(nx + n\,|y| + 1)$$

4) *a*) Démontrer pour h et k tels que :

$$0 < \frac{x}{2} < x + h < \frac{3x}{2}\,; \qquad -2\pi < y + k < 2\pi$$

$$|f_n(x+h, y) - f_n(x,y)| < |h|\, v_n(x)$$

$$|g_n(x, y+k) - g(x,y)| < |k|\, v_n(x)$$

avec :

$$v_n(x) = e^{-\frac{nx}{2}}\,(3n\frac{x}{2} + 2n\pi + 1) \qquad \text{(utiliser l'inégalité 3) } \tilde{b}) \text{ ci-dessus)}$$

b) En utilisant la formule des accroissements finis, démontrer les inégalités :

$$| F_n(x+h,y) - F_n(x,y) - h\, f_n(x,y) | < h^2\, \nu_n(x)$$

$$| F_n(x,y+k) - F_n(x,y) + k\, g_n(x,y) | < k^2\, \nu_n(x)$$

5) Démontrer les inégalités :

$$| F(x+h,y) - F(x,y) - h\, f(x,y) | < h^2\, \nu(x)$$

$$| F(x,y+k) - F(x,y) + k\, g(x,y) | < k^2\, \nu(x) \qquad \text{avec } \nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n(x)$$

En déduire que :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f(x,y) \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -\, g(x,y) \qquad \text{pour } (x,y) \in D^*$$

6) *a*) Pour $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ vérifier :

$$F(x,y) = F(x_0,y) - \int_x^{x_0} f(t,y)\, dt \ .$$

En déduire que :

$$\lim_{x \to 0} F(x,y) = F(x_0,y) - I(x_0,y) \qquad (Cf.\ I.2)$$

On posera alors :

$$F(0,y) = F(x_0,y) - I(x_0,y) \ .$$

b) Démontrer que :

$$F(x,y) - F(0,y) = \int_0^x f(t,y)\, dt \qquad (R)$$

En déduire que :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,y) = f(0,y) \ , \qquad I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(faire $y = 0$ dans la relation R ci-dessus et faire tendre x vers $+\infty$).

c) Montrer que :

$$L(x_0) = F(0,\pi) - F(0,0) - K(0) \qquad (Cf.\ I.2)$$

PARTIE III

On veut montrer que $F(0,y)$ est une primitive de $-\, g(0,y)$ sur $]-2\pi, 2\pi[$.

On pose :

$$A(x,y) = e^{|x|}\,(|x| + |y|) \ ; \qquad B(x,y) = e^{|x|}\,(|x| + |y|)^2$$

1) *a*) Vérifier que

$$\frac{B(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} < 2A(x,y)$$

b) Montrer que f et g sont continues sur $D - \{(0,0)\}$.

2) *a*) Démontrer les inégalités :

$$| e^x \cos y - 1 - x | < \frac{B(x,y)}{2}$$

$$| e^x \sin y - y | < \frac{B(x,y)}{2}$$

(utiliser la formule de Taylor à l'ordre 2).

b) Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, montrer que :

$$e^z - 1 = z\,(1 + \varphi(z)) \text{ avec } |\varphi(z)| < 2A(x,y) .$$

3) Si $z = x + iy$ tel que $A(x,y) < \frac{1}{2}$.

Montrer que :

$$\left| \frac{z}{e^z - 1} - 1 \right| < \frac{2A(x,y)}{1 - 2A(x,y)} .$$

En déduire que f et g sont continues en $(0,0)$.

4) *a*) On pose :

$$\varphi(k) = \frac{F(0,y+k) - F(0,y)}{k} .$$

Montrer que :

$$\varphi(k) = - f(k_1, y + k) - g(k, y + k_2) + f(k_3, y) . \qquad \text{avec } 0 < |k_i| < |k|$$

En déduire que :

$$\lim_{k \to 0} \varphi(k) = - g(0,y) .$$

b) Montrer que :

$$L(x_0) = 0 \qquad \text{(utiliser II 6) } c)$$

puis en faisant tendre x_0 vers $+\infty$, montrer que :

$$I = \frac{\pi^2}{6} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} .$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail